Übungsstunde 9:

Themen:

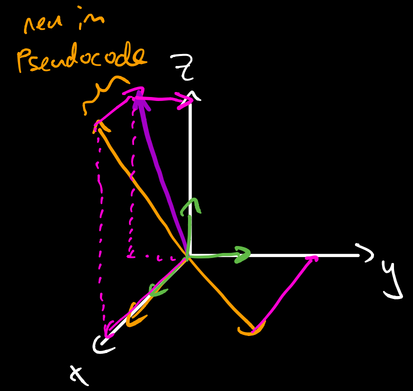
- QR-Zerlegung mit Gram-Schmidt
- Modifizierter Gram-Schmidt
- Matrixnorm
- Ausgleichsrechnung mit der Methode der kleinsten Quadrate
  - ↳ Normalengleichung
  - ↳ QR-Zerlegung
- Determinante

QR-Zerlegung mit Gram-Schmidt: $\underline{\underline{A}} = \underline{\underline{Q}}\,\underline{\underline{R}}$, $\underline{\underline{Q}}\,\underline{\underline{Q}}^T = \underline{\underline{I}}$, $\underline{\underline{Q}}^T\underline{\underline{Q}} = \underline{\underline{I}}$

$$n\left\{\overbrace{\underbrace{\begin{bmatrix} | & | & | & & | \\ v_1 & v_2 & v_3, & \dots, & v_k \\ | & | & | & & | \end{bmatrix}}_{k}}^{A}\right. = n\left\{\overbrace{\underbrace{\begin{bmatrix} | & | & & | \\ q_1 & q_2 & \dots & q_k \\ | & | & & | \end{bmatrix}}_{k}}^{Q}\right. \cdot \left.\overbrace{\underbrace{\begin{bmatrix} \underline{q}_1^T\underline{v}_1 & \underline{q}_1^T\underline{v}_2 & \dots & \underline{q}_1^T\underline{v}_k \\ 0 & \underline{q}_2^T\underline{v}_2 & & \underline{q}_2^T\underline{v}_k \\ \vdots & 0 & & \vdots \\ & \vdots & & \\ 0 & 0 & & \underline{q}_k^T\underline{v}_k \end{bmatrix}}_{k}}^{R}\right\}k$$

Orthonormale Basis

Modifizierter Gram-Schmidt Algo:



Pseudocode:

Für $j = 1,2,3,\dots,n$
- $v = v_i$
- Für $i = 1,2,\dots,j-1$
  - $r_{ij} := \langle q_i, v\rangle$
  - $v = v - r_{ij} q_i$
- $r_{jj} = \|v\|$
- $q_j = \frac{v}{r_{jj}}$

Komponenten in andere Richtungen werden direkt abgezogen

Normalerweise:

(i) $e^{(1)} = \frac{b^{(1)}}{\|b^{(1)}\|}$

(ii) $e^{(2)'} = b^{(2)} - \langle b^{(2)}, e^{(1)}\rangle e^{(1)}$

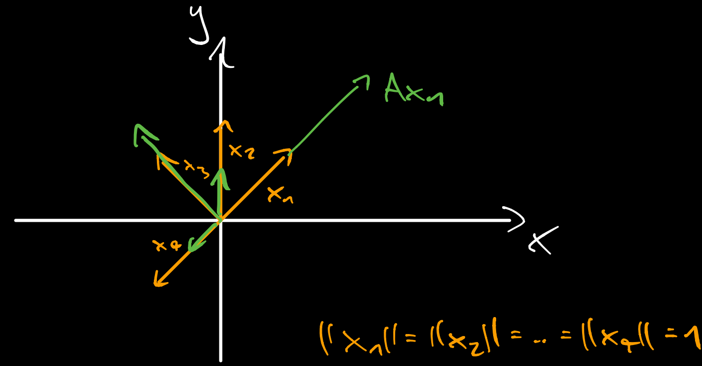
$\Rightarrow \quad e^{(2)} = \frac{e^{(2)'}}{\|e^{(2)'}\|}$

(iii) $e^{(3)'} = b^{(3)} - \langle b^{(3)}, e^{(1)}\rangle e^{(1)} - \langle b^{(3)}, e^{(2)}\rangle e^{(2)}$

$e^{(3)} = \frac{e^{(3)'}}{\|e^{(3)'}\|}$

Matrixnorm:

$$\|\underline{\underline{A}}\| = \max_{\|\underline{x}\|=1} \|\underline{\underline{A}}\,\underline{x}\|$$



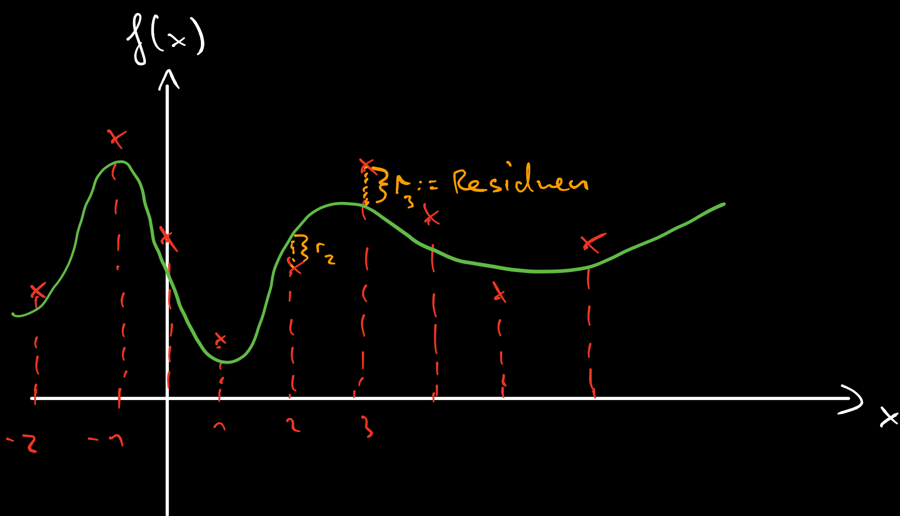
Ausgleichsrechnung mit der Methode der kleinsten Quadrate:

- Normalengleichungen → Handrechnungen
- QR-Zerlegung → Computer

} Betrachten wir heute

- Singulärwertzerlegung (SVD) → später, Profi-Software

$$\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} \quad \end{bmatrix}$$



Problem:

$$\underline{\underline{A}}\,\underline{x} = \underline{c}$$

$$\underline{\underline{A}}\,\underline{x} - \underline{c} = \underline{r} \quad \text{Residuen}$$

$$\begin{bmatrix} \quad \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \quad \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \quad \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ \vdots \\ r_m \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \|r\|_2 = \|\underline{\underline{A}}\,\underline{x} - \underline{c}\|_2 = \sqrt[2]{r_1^2 + r_2^2 + \dots + r_m^2} \quad \text{minimieren!}$$

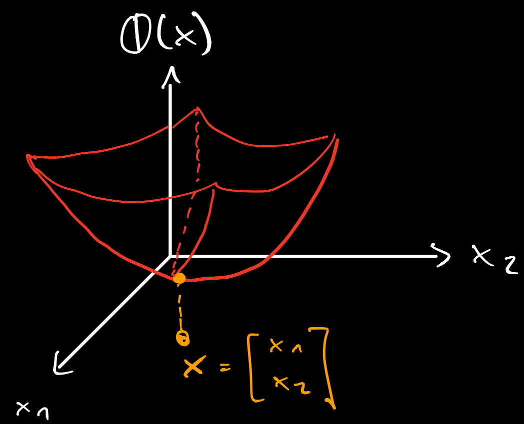
Methode der kleinsten Quadrate

Normalengleichung: $\underline{\underline{A}}\,\underline{x} = \underline{c}$ nicht perfekt lösbar

Lösen stattdessen $\boxed{\underline{\underline{A}}^T \underline{\underline{A}}\,\underline{x} = \underline{\underline{A}}^T \underline{c}}$

Beweisidee:

$$\Phi(x) := \|\underline{\underline{A}}\,\underline{x} - \underline{c}\|_2^2 = \langle \underline{\underline{A}}\,\underline{x} - \underline{c}, \underline{\underline{A}}\,\underline{x} - \underline{c} \rangle_2 \leq \|\underline{\underline{A}}\,\underline{y} - \underline{c}\|_2^2 \quad \forall y \in \mathbb{R}^n$$



$$\Phi_z : \quad t \mapsto \Phi_z(t) := \|\underline{\underline{A}}(\underline{x} + t\underline{z}) - \underline{c}\|_2^2 \qquad \underline{z} \neq 0, \; t \in \mathbb{R}$$

$$\Phi_z(t) = \langle \underline{\underline{A}}(\underline{x} + t\underline{z}) - \underline{c}, \underline{\underline{A}}(\underline{x} + t\underline{z}) - \underline{c} \rangle$$

$$= [\underline{\underline{A}}(\underline{x} + t\underline{z}) - \underline{c}]^T [\underline{\underline{A}}(\underline{x} + t\underline{z}) - \underline{c}]$$

$$= t^2(\underline{z}^T \underline{\underline{A}}^T \underline{\underline{A}}\,\underline{z}) + 2t(\underline{z}^T \underline{\underline{A}}^T \underline{\underline{A}}\,\underline{x} - \underline{z}^T \underline{\underline{A}}^T \underline{c}) + \underbrace{(\underline{x}^T \underline{\underline{A}}^T \underline{\underline{A}}\,\underline{x} + \underline{c}^T \underline{c} - 2\underline{x}^T \underline{\underline{A}}^T \underline{c})}_{\text{Minimaler Fehler}^2 = \text{Residuum}^2}$$

Möchten, dass das Minimum bei $t=0$ liegt $\Leftrightarrow \Phi_z'(t=0) = 0$

$$\Phi_z'(0) \stackrel{!}{=} 0 = 2(\underline{z}^T \underline{\underline{A}}^T \underline{\underline{A}}\,\underline{x} - \underline{z}^T \underline{\underline{A}}^T \underline{c}) = 2\underline{z}^T(\underline{\underline{A}}^T \underline{\underline{A}}\,\underline{x} - \underline{\underline{A}}^T \underline{c}) \qquad \underline{z} \neq 0$$

$$\Leftrightarrow \underline{\underline{A}}^T \underline{\underline{A}}\,\underline{x} - \underline{\underline{A}}^T \underline{c} \stackrel{!}{=} 0$$

$$\underline{\underline{A}}^T \underline{\underline{A}}\,\underline{x} = \underline{\underline{A}}^T \underline{c} \qquad \square$$

Beispiel:

x_i	-1	0	1	2
y_i	0	1	3	4

$f(-1) = 0 = a(-1)^2 - b + c$

$f(0) = 1 = c$

$f(1) = 3 = a + b + c$

$\vdots$

Hypothese: $y = f(x) = \boxed{a}x^2 + \boxed{b}x + \boxed{c}$

$= a\alpha(x) + b\beta(x) + c\gamma(x)$

$\Rightarrow \quad \alpha(x) = x^2, \quad \beta(x) = x, \quad \gamma(x) = 1$

$$\underline{\underline{A}}\,\underline{x} = \underline{c}$$

$$\underline{x} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$$

$$\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} \alpha(-1) & \beta(-1) & \gamma(-1) \\ \alpha(0) & \beta(0) & \gamma(0) \\ \alpha(1) & \beta(1) & \gamma(1) \\ \alpha(2) & \beta(2) & \gamma(2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\underline{c} = \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$\underline{\underline{A}}\,\underline{x} = \underline{c}$$

$$\underline{\underline{A}}^T \underline{\underline{A}}\,\underline{x} = \underline{\underline{A}}^T \underline{c}$$

$$\underline{\underline{A}}^T \underline{c} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 4 \\ -1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} = \underline{\begin{bmatrix} 19 \\ 11 \\ 8 \end{bmatrix}}$$

$$\underline{\underline{A}}^T \underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 4 \\ -1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \underline{\begin{bmatrix} 18 & 8 & 6 \\ 8 & 6 & 2 \\ 6 & 2 & 4 \end{bmatrix}}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 18 & 8 & 6 \\ 8 & 6 & 2 \\ 6 & 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 19 \\ 11 \\ 8 \end{bmatrix} \rightarrow \underline{\underline{\text{Gauss}}}$$

Ausgleichsrechn. mit QR:

$$\underline{\underline{A}}\,\underline{x} - \underline{c} = \underline{r} \quad \text{Risiduen minimieren}$$

$\underline{\underline{A}} = \underline{\underline{Q}}\,\underline{\underline{R}}$, $\underline{\underline{Q}}$ orth. quad. , $\underline{\underline{R}} = \begin{bmatrix} R_0 \\ 0 \end{bmatrix}$, R_0 ist eine quadratische rechte obere Dreiecksmatrix

$$\underline{\underline{A}}\,\underline{x} = \underline{c}$$

$$\underline{\underline{Q}}\,\underline{\underline{R}}\,\underline{x} = \underline{c} \qquad | \, Q^T \cdot$$

$$\underline{\underline{R}}\,\underline{x} = \underline{\underline{Q}}^T \underline{c} = \underline{d}$$

$$\begin{bmatrix} \underline{\underline{R_0}}\,\underline{x} \\ 0 \end{bmatrix} = \underline{d} = \begin{bmatrix} \underline{d_0} \\ \underline{d_1} \end{bmatrix}$$

$\leadsto$ lösen $\underline{\underline{R_0}}\,\underline{x} = \underline{d_0}$, $\underline{d_1} = \underline{r}$ unsere Residuen

Beispiel:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - 1 &= r_1 \\ x_2 - 3 &= r_2 \quad \Longleftrightarrow \quad \underline{\underline{A}}\,\underline{x} - \underline{c} = \underline{r} \\ x_2 - 4 &= r_3 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \underline{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \quad \underline{c} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$\underline{\underline{Q}}\,\underline{\underline{R}}$:

$$\underline{\underline{A}} = \underbrace{\left.\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & \boxed{1} \end{bmatrix}\right\}3}_{2} \qquad \underline{\underline{G}} \cdot \underline{\underline{A}} = \underline{\underline{R}}$$

$$: 0$$

$$\underline{\underline{G}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos & \sin \\ 0 & -\sin & \cos \end{bmatrix}$$

$$\underline{\underline{G}} \cdot \underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & \cos + \sin \\ 0 & \underset{\overset{!}{=} 0}{\boxed{\cos - \sin}} \end{bmatrix} \Rightarrow \phi = 45^\circ \quad \sin = \cos = \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{G}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} , \quad \underline{\underline{R}} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & \sqrt{2} \end{bmatrix} \\ \begin{matrix} 0 & 0 \end{matrix} \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & \sqrt{2} \end{bmatrix} = \underline{\underline{R_0}}$$

$$= \underline{\underline{Q}}^T \qquad\qquad = \begin{bmatrix} R_0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\underline{d}: \qquad \underline{\underline{Q}}^T \underline{c} = \underline{\underline{G}}\, \underline{c} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} \sqrt{2} \\ 7 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} \left.\begin{matrix} \\ \\ \end{matrix}\right\} \underline{d_0} \\ \underline{d_1} \end{matrix}$$

$$\Rightarrow \quad \underline{\underline{R}}\, \underline{x} = \underline{d} \iff \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & \sqrt{2} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} \sqrt{2} \\ 7 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \underline{\underline{R_0}}\, \underline{x} = \underline{d_0} \iff \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & \sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} \sqrt{2} \\ 7 \end{bmatrix}$$

$\longrightarrow$ Gauss $\rightarrow x_1, x_2$

$\underline{\underline{QR}}$ mit Gram-Schmidt:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & \boxed{1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} | & | \\ \underline{a}_1 & \underline{a}_2 \\ | & | \end{bmatrix}$$

$\boxed{1} \overset{!}{=} 0$

i) $\underline{q}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ (bereits Norm 1)

ii) $\underline{q}_2' = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

$$\underline{q}_2 = \frac{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}}{\left\| \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\|} = \underline{\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}}$$

$$\Rightarrow \underline{Q} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 0 & ? \\ 0 & 1 & ? \\ 0 & 1 & ? \end{bmatrix}$$

$$\underline{\underline{R}} = \begin{bmatrix} \underline{q}_1^T \underline{a}_1 & \underline{q}_1^T \underline{a}_2 \\ 0 & \underline{q}_2^T \underline{a}_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \underline{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & \sqrt{2} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}} \left.\begin{matrix} \\ \end{matrix}\right\} R_0$$

$$\underline{d} = \underline{\underline{Q}}^T \underline{c} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ \boxed{? \quad ? \quad ?} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} \sqrt{2} \\ 7 \\ ? \end{bmatrix} \begin{matrix} \left.\begin{matrix} \\ \end{matrix}\right\} \underline{d_0} \\ \} \underline{d_1} \end{matrix}$$

unnötig, da es nur das Residuum bestimmt

$\Rightarrow$ Kriegen exakt dieselbe Lösung!

Determinante:

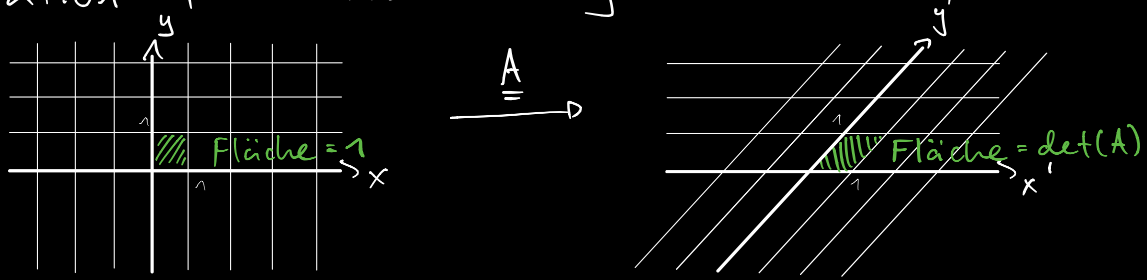
$\det: \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}$

$\underline{A} \mapsto \det(\underline{A})$

Bildet jede $n\times n$ Matrix auf eine reelle Zahl ab

⚠ Nicht definiert für nicht-quadratische Matrizen (ausser Gram'sche Determinante, wird in Analysis II behandelt)

Interpretation: Flächenveränderung durch die Matrix



Berechnungsmethoden:

2×2 - Matrizen: $\det\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \underline{\underline{ad-bc}}$

3×3 - Matrizen: Regel von Sarrus:

$$\det\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}\begin{matrix} a & b \\ d & e \\ g & h \end{matrix} = \underline{aei + bfg + cdh}\ \underline{-gec - hfa - idb}$$

Laplac'sche Entwicklungssatz:

Generelle Methode, welche immer funktioniert (also auch für die 2×2 & 3×3 Matrizen).

Ist eine rekursive Methode von folgender Form:

Wähle beliebige Spalte oder Zeile

Gehe durch alle Koeff. der Zeile/Spalte & reduziere die Determinante

$$\det\begin{bmatrix} \boxed{\begin{matrix} a \\ d \\ g \end{matrix}} & \begin{matrix} b \\ e \\ h \end{matrix} & \begin{matrix} c \\ f \\ i \end{matrix} \end{bmatrix} = +a\cdot\overbrace{\det\begin{bmatrix} e & f \\ h & i \end{bmatrix}}^{\text{Kann weiter reduziert werden}} - d\cdot\det\begin{bmatrix} b & c \\ h & i \end{bmatrix}$$

$$+ g\cdot\det\begin{bmatrix} b & c \\ e & f \end{bmatrix}$$

Muster würde so weiter gehen

↳ Wählt die Spalte / Zeile möglichst geschickt, also mit möglichst vielen Nullen, sodass viele Summanden wegfallen.